60 LA LOI DE POISSON 2

60.1 PRINCIPE 2
60.2 EXEMPLE 3
60.3 TABLES ET GRAPHIQUES 4
60.4 VALEURS CARACTERISTIQUES 6
60.5 DANS LE TABLEUR EXCEL 6

60 La loi de Poisson

60.1 Principe

Dans le domaine biomédical, on rencontre plusieurs situations dans lesquelles le nombre d'occurrence d'un événement ne correspond pas aux conditions de la loi Binomiale. Le nombre d'hématies[1] par ml de sang, le nombre de diatomées[2] par ml d'eau, le nombre d'anodontes[3] par m^2, le nombre de désintégrations d'un radio -isotope[4] par minute.

Il s'agit d'un nombre d'événements élémentaires (l'occurrence d'un de ces éléments) par unité de volume, de surface, de temps. Si la répartition des éléments est aléatoire dans l'espace considéré la fonction de densité de probabilité est donnée par la loi de Poisson[5].

La variable aléatoire de Poisson s'écrit X v.a. Po(μ) et sa fonction de densité de probabilité est donnée par la fonction :

$$P(X = x) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$ **Équation 60-1**

---

[1] *Hématie (grec : haima, sang) : globule rouge du sang coloré par l'hémoglobine, et dont le nombre par millimètre cube de sang est d'environ 5 millions. SYN. : érythrocyte.*

[2] *Diatomée (grec. diatomos, coupé en deux) : classe d'algues unicellulaires marines ou d'eau douce, entourées d'une coque siliceuse bivalve souvent finement ornementée.*

[3] *Anodonte (du grec. odous, odontos, dent) : mollusque bivalve d'eau douce, dont la charnière est privée de dents. (Long. max. 20 cm env.) nom commun : moule d'étang.*

[4] *Isotope : chacun des différents types de noyaux atomiques d'un même élément, différent par leur nombre de neutrons mais ayant le même nombre de protons et d'électrons. Isotope radioactif, radio -isotope.*

[5] *Simon -Denis Poisson, mathématicien français (Pithiviers 1781 - Paris 1840). Il est un des créateurs de la physique mathématique. Il a appliqué l'analyse mathématique à la mécanique céleste et à la théorie de l'attraction, à celle de la chaleur, à l'électricité, à l'élasticité, à la lumière, au magnétisme et au calcul des probabilités.*

expression dans laquelle X ≥ 0 et dont le seul paramètre est μ, le nombre d'événements moyen.

Sous l'hypothèse d'une répartition aléatoire des événements, μ est proportionnel à l'unité de volume, d'espace ou de temps. S'il y a, en moyenne, 6000 désintégrations par minute, il y en a, en moyenne, 100 par seconde.

60.2 Exemple

Répartition aléatoire des événements : le nombre d'hématies par ml ne sera décrit par une v.a. Po(μ) que si le sang est soigneusement homogénéisé, si les globules sédimentent, la condition n'est pas remplie. Elle n'est pas remplie non plus pour les anodontes si celles -ci ont tendance à se rassembler, certaines zones étant plus denses que d'autres (répartition agrégative). Elle n'est pas remplie non plus pour des plants de maïs ou des pommiers plantés en ligne : il s'agit là d'une répartition régulière et non aléatoire.

Des anodontes vivent sur le fond d'une rivière avec une densité de 150 ind/m^2. Un écologiste effectue des captures avec un quadrat[6] de 1 dm^2. En supposant une répartition non agrégative, quelle est la probabilité qu'il ne capture aucun mollusque ?

Il y a 100 dm^2 dans un m^2 . La moyenne par dm^2 est donc 150/100 = 1,5.

$$P(X=0) = \frac{e^{-1.5}1.5^0}{0!} = e^{-1.5} = 0.22$$

Pour rappel x^0 pour x > 0 et 0 ! valent 1.

Un écologiste effectue des captures avec un quadrat de 10 dm^2. En supposant une répartition non agrégative, quelle est la probabilité qu'il capture plus de 10 mollusques ?

Notez que la moyenne par quadrat de 10 dm2 est de 15 mollusques.

X, le nombre de mollusques, n'ayant pas de limite théorique vers le haut P(X > 10) s'exprime par 1 -P(X ≤ 10), et se calcule de façon récurrente :

[6] *Un quadrat est un cadre de surface déterminée, souvent fixé à un filet, qui permet la récolte quantitative d'organismes.*

$$(P(X=0)=\frac{e^{-15}15^{0}}{0!}=3\times10^{-7})$$

$$+(P(X=1)=\frac{e^{-15}15^{1}}{1!}=4.5\times10^{-6})$$

+...

$$+(P(X=9)=\frac{e^{-15}15^{9}}{9!}=0.032)$$

$$+(P(X=10)=\frac{e^{-15}15^{10}}{10!}=0.048)$$

$$=0.118$$

La probabilité recherchée est donc
1 –0,118 = 0,882

60.3 Tables et graphiques

Ce calcul récurrent est simplifié par l'usage de tables dans lesquelles la formule a été pré -calculée .

P(X = x) est obtenue en appliquant la formule vue plus haut. P(X ≤ x) est obtenue en additionnant P(X = x) + P(X = x -1) +… + P(X = 0).

> *Classiquement les tables ne publient que la fonction de répartition, la fonction de densité de probabilité pouvant en être déduite par une seule opération :*
> *P(X = x) = P(X ≤ x) - P(X ≤ x -1)*
>
> *Il faut noter que pour une variable discontinue :*
> *P(X ≤ x)≠ P(X < x) et P(X > x) = 1 - P(X ≤ x).*

X = Po(15)		
x	P(X = x)	P(X ≤ x)
10	0,05	0,12
11	0,07	0,18
12	0,08	0,27
13	0,10	0,36
14	0,10	0,47
15	0,10	0,57
16	0,10	0,66

Tableau 60 -60-1 Extrait de la table de la fonction de densité de probabilité (P(X = x)) et fonction de répartition (P(X ≤ x)) pour X v.a. Po(15) Valeurs de X dans la colonne de gauche.

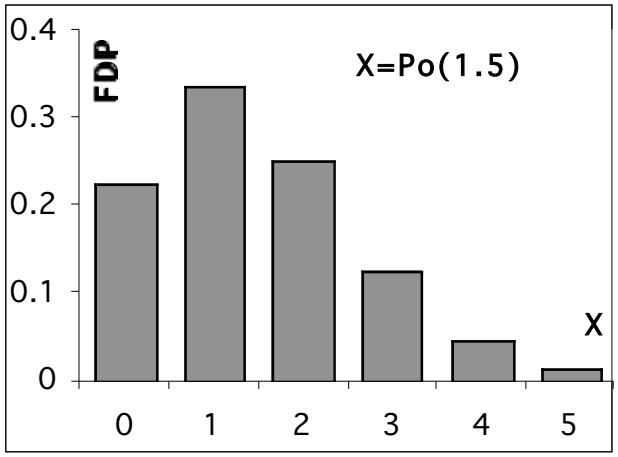

Figure 60 -1 Représentation graphique de la fonction de densité de probabilité pour X v.a. Po(1.5).

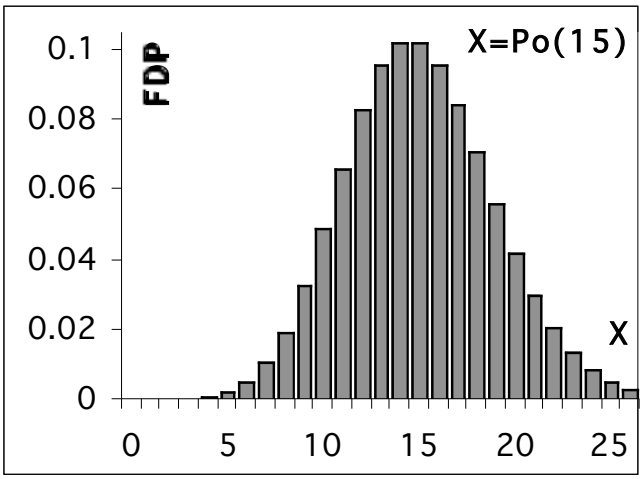

Figure 60 -2 Représentation graphique de la fonction de densité de probabilité pour X v.a. Po(15).

Les distributions pour lesquelles μ est grand ($\mu \geq 10$) sont des distributions symétriques et tendent vers des distributions normales lorsque μ augmente (voir plus loin : variable aléatoire normale).

60.4 Valeurs caractéristiques

Pour X Po(μ), E(X) = μ et VAR(X) = μ

Soit une v.a. Po(25), entre quelles bornes s'attend -on à trouver 95% des valeurs ? Utilisons l'approximation $\mu \pm 2\sigma$ valable pour les distributions symétriques, avec $\sigma = \sqrt{\mu} \approx 5$. La moyenne étant 25, 95% des valeurs de X sont donc comprises approximativement entre 15 et 35.

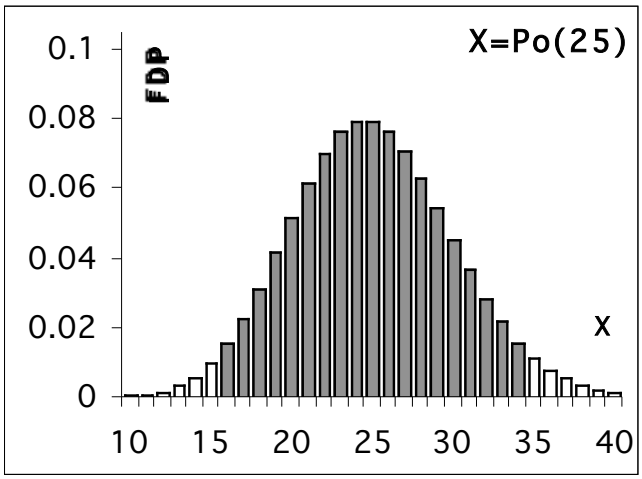

Figure -3 Distribution Po(25). La surface grisée correspond approximativement à 95% des valeurs de X.24/8 -(12/8)^2 = 192/64 - 144/64 = 48/64 = 0,75

60.5 Dans le tableur Excel

la fonction LOI.POISSON(x;μ;VRAI) renvoie P(X ≤ x) pour X v.a. Po(μ)
Dans notre exemple,
LOI.POISSON(10;15;VRAI)
renvoie 0,118.

Prenez garde, les conventions d'Excel varient d'une fonction à l'autre.