Notions de valeur et vecteur propre

Tables des matières :

Objectifs

Les notions de valeurs propres et vecteurs propres sont centre de toutes les méthodes d'analyses factorielles.

La théorie mathématique sous-jacente reste assez hermétique pour le profane, mais il est heureusement possible de faire bon usage de ces analyses sans entrer dans ce cénacle ;-)

Nous soulevons ici un coin du voile, de la façon la plus intuitive possible, en nous basant sur la notion de diagonalisation des matrices, qui est une méthode numérique liée au calcul des vecteurs propres et valeurs propres, bien que les algorithmes performants procèdent en pratique d'une autre façon.

Diagonalisation des matrices

Opérations élémentaires

Trois opérations élémentaires permettent de modifier le contenu d'une matrice **A** tout en gardant la mémoire de ces changements et en permettant de refaire le chemin en sens inverse.

Les matrices associées à ces opérations sont des matrices identités (donc carrées) dont un seul élément est modifié. Elles opèrent les lignes en multiplication par la gauche, et les colonnes en multiplication par la droite.

Multiplication d'une ligne par une constante

Remplacement d'un élément de la diagonale par un scalaire, retour à la situation initiale en multipliant par son inverse

				2	9	0	4	3
				8	2	4	0	5
				0	9	9	9	1
				0	5	9	3	8
1	0	0	0	2	9	0	4	3
0	5	0	0	40	10	20	0	25
0	0	1	0	0	9	9	9	1
0	0	0	1	0	5	9	3	8
1	0	0	0	2	9	0	4	3
0	0,2	0	0	8	2	4	0	5
0	0	1	0	0	9	9	9	1
0	0	0	1	0	5	9	3	8

Multiplication d'une colonne par une constante

Remplacement d'un élément de la diagonale par un scalaire, retour à la situation initiale en multipliant par son inverse

1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	4	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1

1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	0,25	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1

2	9	0	4	3
8	2	4	0	5
0	9	9	9	1
0	5	9	3	8

2	9	0	4	3
8	2	16	0	5
0	9	36	9	1
0	5	36	3	8

2	9	0	4	3
8	2	4	0	5
0	9	9	9	1
0	5	9	3	8

Permutation de deux lignes

Permutations des éléments de la diagonale correspondant, retour à la situation initiale en multipliant par la même matrice.

2	9	0	4	3
8	2	4	0	5
0	9	9	9	1
0	5	9	3	8

1	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	0	0	1

2	9	0	4	3
0	9	9	9	1
8	2	4	0	5
0	5	9	3	8

1	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	0	0	1

2	9	0	4	3
8	2	4	0	5
0	9	9	9	1
0	5	9	3	8

Permutation de deux colonnes

Permutations des éléments de la diagonale correspondant, retour à la situation initiale en multipliant par la même matrice.

					0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
					0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
					0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
					1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
					0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
2	9	0	4	3	4	9	0	2	3	2	9	0	4	3
8	2	4	0	5	0	2	4	8	5	8	2	4	0	5
0	9	9	9	1	9	9	9	0	1	0	9	9	9	1
0	5	9	3	8	3	5	9	0	8	0	5	9	3	8

Combinaison linéaire de 2 lignes

La ligne 4 est multipliée par 3 et additionnée à la ligne 2. Le résultat est stocké en ligne 2.

Multipliée par 3 : car le scalaire introduit dans la matrice identité est 3
La ligne 4 est multipliée : car le scalaire est placé en colonne 4
Le résultat est additionné à la ligne 2 et stocké en ligne 2 : car le scalaire est placé en ligne 2.

L'opération inverse est obtenue en plaçant –3 à la même position

				2	9	0	4	3
				8	2	4	0	5
				0	9	9	9	1
				0	5	9	3	8
1	0	0	0	2	9	0	4	3
0	1	0	3	8	17	31	9	29
0	0	1	0	0	9	9	9	1
0	0	0	1	0	5	9	3	8
1	0	0	0	2	9	0	4	3
0	1	0	-3	8	2	4	0	5
0	0	1	0	0	9	9	9	1
0	0	0	1	0	5	9	3	8

Combinaison linéaire de 2 colonnes

La colonne 4 est multipliée par 2 et additionnée à la colonne 1. Le résultat est stocké en colonne 1.

Multipliée par 2 : car le scalaire introduit dans la matrice identité est 2
La colonne 4 est multipliée : car le scalaire est placé en ligne 4
Le résultat est additionné à la colonne 1 et stocké en colonne 1 : car le scalaire est placé en colonne 1.

L'opération inverse est obtenue en plaçant –2 à la même position

					1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
					0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
					0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
					2	0	0	1	0	-2	0	0	1	0
					0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
2	9	0	4	3	10	9	0	4	3	2	9	0	4	3
8	2	4	0	5	8	2	4	0	5	8	2	4	0	5
0	9	9	9	1	18	9	9	9	1	0	9	9	9	1
0	5	9	3	8	6	5	9	3	8	0	5	9	3	8

Diagonalisation d’une matrice

Soit A la matrice à diagonaliser, **L1,L2,L3** … les matrices d’opérations élémentaires sur les lignes, dans l’ordre de leur exécution et **C1,C2,C3**…. les matrices d’opérations élémentaires sur les colonnes. La succession des opérations s’écrit de la façon suivante :

			L1	**A**			
			L1	**A**	**C1**		
		L2	**L1**	**A**	**C1**		
	L3	**L2**	**L1**	**A**	**C1**	**C2**	
L4	**L3**	**L2**	**L1**	**A**	**C1**	**C2**	**C3**

Le produit matriciel n’étant pas commutatif, les opérations à gauche se succèdent de droite à gauche et les opérations à droite de gauche à droite.

Le produit matriciel étant associatif, le produit **L4 L3 L2 L1** peut être effectué et stocké dans **L** , le produit **C1 C2 C3** peut être effectué et stocké dans **C**, … à l’infini.

Lorsque l’ensemble des opérations élémentaires aboutit à la diagonalisation de **A**, l’opération peut être réalisée par le produit **L A C** = **Q®**

Q® est une matrice remplie de 0, la diagonale principale comportant r valeurs 1, r étant le rang de la matrice **A**. Le rang est le nombre de dimensions nécessaires à représenter **A** dans l’espace. Si **A** est carrée p x p et de rang complet (non singulière, r = p) la matrice **Q®** est la matrice identité p x p.

Exemple pour une matrice non symétrique

Par facilité, l'exemple est pris sur une matrice carrée **A**, mais elle pourrait être rectangulaire.

A

2	4	6
4	8	12
1	2	3

Opérations élémentaires sur les lignes :

1	0	0	1	0	-2	0	0	1
-2	1	0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1	0	0
L1			L2			L3		

Opérations élémentaires sur les colonnes :

1	0	0	1	0	0	1	-1	0	1	0	-1
0	0,5	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0,3	0	0	1	0	0	1
C1			C2			C3			C4		

Synthèse :

L			A			C				Q®		
0	0	1	2	4	6	1	-1	-1		1	0	0
-2	1	0	4	8	12	0	0,5	0	=	0	0	0
1	0	-2	1	2	3	0	0	0,3		0	0	0

La matrice A est de rang 1.

Toutes les matrices d'opération élémentaire ayant un inverse, $\mathbf{L^{-1}}$ et $\mathbf{C^{-1}}$ existent, et $\mathbf{L^{-1}\ L\ A\ C\ C^{-1} = I\ A\ I = A = L^{-1}\ Q®\ C^{-1}}$ ce qui montre que l'historique des changements est bien stocké et que l'opération est réversible.

2	0	1	1	0	0	1	2	3		2	4	6
4	1	2	0	0	0	0	2	0	=	4	8	12
1	0	0	0	0	0	0	0	3		1	2	3

Exemple pour une matrice symétrique

A

2	4	6
4	8	12
6	12	3

Opérations élémentaires sur les lignes :

1	0	0	1	0	-2	1	0	0	-0,3	0	0	1	0	0
-2	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	0,6	0	0	1	0	1	0
	L1			L2			L3			L4			L5	

Opérations élémentaires sur les colonnes : la matrice étant symétrique, les colonnes sont les lignes transposées et les opérations sur les colonnes sont les mêmes que celles sur les lignes, transposées.

1	-2	0	1	0	0	1	0	0	-0,3	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	-2	0	1	0	0	0,6	0	0	1	0	1	0
	C1			C2			C3			C4			C5	

Synthèse :

	L			A			C				Q®	
-0,3	0	0,6	2	4	6	-0,3	0	-2		-1	0	0
0	0	0,6	4	8	12	0	0	1	=	0	1	0
-2	1	0	6	12	3	0,6	0,6	0		0	0	0

La matrice **A** est de rang 2. **L** étant égale a **C'**, l'opération inverse montre que la matrice **A** est entièrement stockée dans la matrice **L**.

	L-1			Q®			L'-1				A	
-3,2	3,5	0	-1	0	0	-3,2	-6,3	0		2	4	6
-6,3	6,9	1	0	1	0	3,5	6,9	1,7	=	4	8	12
0	1,7	0	0	0	0	0	1	0		6	12	3

Vecteurs propres et valeurs propres

Diagonalisation d'une matrice de corrélation

Soit R une matrice de corrélation 3 x 3 :

R

1	0,5	0,4
0,5	1	0,8
0,4	0,8	1

Diagonalisation de R :

L			R			C				I		
1,2	-0,6	0	1	0,5	0,4	1,2	0	0		1,00	0,00	0,00
0	1	0	0,5	1	0,8	-0,6	1	-1,3	=	0,00	1,00	0,00
0	-1,3	1,7	0,4	0,8	1	0	0	1,7		0,00	0,00	1,00

La matrice **R** est de rang complet, **Q® = I** et **L^{-1} L^{-1} '** = **R**

L-1			L'-1				R		
0,9	0,5	0	0,9	0	0		1	0,5	0,4
0	1	0	0,5	1	0,8	=	0,5	1	0,8
0	0,8	0,6	0	0	0,6		0,4	0,8	1

Les solutions de la diagonalisation sont multiples : voici une autre matrice **L** qui arrive au même résultat. Il y en a beaucoup d'autres.

L-1			L'-1				R		
0,9	0	0,4	0,9	0,2	0		1	0,5	0,4
0,2	0,6	0,8	0	0,6	0	=	0,5	1	0,8
0	0	1	0,4	0,8	1		0,4	0,8	1

Il n'est donc pas trivial d'obtenir les vecteurs propres et valeurs propres par la diagonalisation de R. De nombreuses méthodes, itératives et plus ou moins robustes, sont décrites dans la littérature et implémentées (avec plus ou moins de bonheur) dans de nombreux logiciels.

Diagonalisation optimisée pour obtenir les valeurs propres et vecteurs propres.

Les valeurs de la matrice **L** proviennent de la fonction EVD du logiciel R.

L			R			L'				I		
1,2	-0,6	0	1	0,5	0	1,2	0	0		1,00	0,00	0,00
0	1	0	0,5	1	1	-0,6	1	-1,3	=	0,00	1,00	0,00
0	-1,3	1,7	0,4	0,8	1	0	0	1,7		0,00	0,00	1,00

La matrice **L**-1 sera appelée F (pour Factor loadings). Nous retrouvons la propriété générale vue plus haut :

F			F'				R		
-0,7	0,7	0,1	-0,7	-0,9	-0,9		1	0,5	0,4
-0,9	-0,2	-0,3	0,7	-0,2	-0,4	=	0,5	1	0,8
-0,9	-0,4	0,3	0,1	-0,3	0,3		0,4	0,8	1

Nous observons à présent une nouvelle propriété :

F'			F				Λ		
-0,7	-0,9	-0,9	-0,7	0,7	0,1		2,1	0	0
0,7	-0,2	-0,4	-0,9	-0,2	-0,3	=	0	0,7	-0
0,1	-0,3	0,3	-0,9	-0,4	0,3		0	-0	0,2

Le produit F'F représente la norme des vecteurs sur la diagonale et une valeur fonction de leur cosinus en dehors de la diagonale (voir module 220 : représentation géométrique des vecteurs).

Leur norme est appelée valeur propre (λ_i, eigenvalue). L'algorithme a pour objectif de trouver la plus grande valeur propre de la matrice (ici 2,1), puis la plus grande dans une direction orthogonale et ainsi de suite. Nous verrons que chacune d'elle représente une variance : notez déjà que la somme des valeurs propres est égale à 3, soit p, le nombre de variables, ou encore la somme des valeurs diagonales de **R**, ou encore la somme des variances de 3 variables standardisées qui ont généré les coefficients de corrélation de **R**.

Les colonnes de F apparaissent indépendantes (cosinus nul, orthogonales, non corrélées). Chacune est appelée vecteur propre ($\mathbf{f}_i$, eigenvector). Chaque vecteur définit la direction $\mathbf{f}_i$ dans l'espace dans laquelle on trouve la variance la plus grande.

Définition des valeurs propres et vecteurs propres

Le couple valeur propre – vecteur propre est une véritable curiosité mathématique.
Pour chaque couple , la relation suivante est respectée :

$$\mathbf{R}\ \mathbf{f}_i, = \mathbf{f}_i,\ \lambda_i$$

$$\underset{R}{\begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,5 & 1 & 0,8 \\ 0,4 & 0,8 & 1 \end{bmatrix}} \underset{f1}{\begin{bmatrix} -0,7 \\ -0,9 \\ -0,9 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -1,5 \\ -2 \\ -1,9 \end{bmatrix} = \underset{f1}{\begin{bmatrix} -0,7 \\ -0,9 \\ -0,9 \end{bmatrix}} * \underset{\lambda 1}{2,1} = \begin{bmatrix} -1,5 \\ -2 \\ -1,9 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R}{\begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,5 & 1 & 0,8 \\ 0,4 & 0,8 & 1 \end{bmatrix}} \underset{f2}{\begin{bmatrix} 0,7 \\ -0,2 \\ -0,4 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -0,1 \\ -0,2 \end{bmatrix} = \underset{f2}{\begin{bmatrix} 0,7 \\ -0,2 \\ -0,4 \end{bmatrix}} * \underset{\lambda 2}{0,7} = \begin{bmatrix} 0,46 \\ -0,1 \\ -0,2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R}{\begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,5 & 1 & 0,8 \\ 0,4 & 0,8 & 1 \end{bmatrix}} \underset{f3}{\begin{bmatrix} 0,05 \\ -0,3 \\ 0,29 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0,01 \\ -0,1 \\ 0,06 \end{bmatrix} = \underset{f3}{\begin{bmatrix} 0,05 \\ -0,3 \\ 0,29 \end{bmatrix}} * \underset{\lambda 3}{0,19} = \begin{bmatrix} 0,01 \\ -0,1 \\ 0,06 \end{bmatrix}$$

Cette propriété définit le couple valeur propre – vecteur propre d'une matrice.